

Contrôle Final: Analyse Mathématique

Filière S.E.G: Semestre1 (Groupes E et F)
Session: Hiver 2017/2018 Durée: 1h30min
Prof. Koceyl Salim MOHSINE

Exercice 1 (06 points)

Soit f une fonction définie par:

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{x}} - 1$$

- 1- Déterminer le domaine de définition de la fonction f .
- 2- Déterminer la fonction réciproque f^{-1} de la fonction f .
- 3- Déterminer le domaine de définition de la fonction réciproque f^{-1} .
- 4- Etudier la monotonie de la fonction f^{-1} .
- 5- Déterminer l'équation de la droite tangente à la fonction f^{-1} passant par le point $(1, f^{-1}(1))$

Exercice 2 (05 points)

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xe^x}{e^x - 1} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}} + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- 1- Etudier la continuité de la fonction f au point 0.
- 2- Etudier la dérivabilité de la fonction f au point 0.

Exercice 3 (04 points)

Calculer les limites suivantes:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^3 + 2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - e^x}{x^2}$$

Exercice 4 (05 points)

On considère la fonction f définie par:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

- 1- Ecrire f en fonction de $\frac{1}{x-1}$ et $\frac{1}{x+1}$.
- 2- Calculer les dérivées $f^{(1)}(x)$, $f^{(2)}(x)$, $f^{(3)}(x)$, $f^{(4)}(x)$.
- 3- Dédire l'expression de la dérivée d'ordre supérieur $f^{(n)}(x)$.

N.B: L'étudiant(e) qui ne respecte pas sa place d'examen et son groupe, sa note sera nulle.

La correction de l'Examen d'Analyse 2017/2018
Groupe E et F

Page 1

Exercice 1

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{x}} - 1$$

① Domaine de définition de f :

Aziz économiste_tangérois

Whasapp 0693041014

$$Df = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ existe}\}$$

$$x \in Df \Rightarrow \sqrt{\frac{1+x}{x}} \geq 0 \text{ et } x \neq 0$$

$$\Rightarrow (1+x)(x) \geq 0 \text{ et } x \neq 0$$

$$\Rightarrow x \in]-\infty, -1] \cup]0, +\infty[\text{ et } x \neq 0$$

~~car~~ $x > 0$ signifie qu'on doit exclure 0

~~infinitésimale~~

$$Df =]-\infty, -1] \cup]0, +\infty[$$

② Pour que f soit bijective, il faut:

- f est continue sur Df (évidemment montré due à la fonction racine carrée qui est continue sur son domaine de définition).

Whasapp 0693041014

Aziz économiste_tangérois

f est supposée strictement monotone, il n'est pas

demandé de prouver la monotonie: Si on précise ici la monotonie de f , il nous reste à signaler que f et f^{-1} ont le même sens de variation sur une restriction bien définie.

$$\forall y \in D_f : f(y) = x$$

$$\forall x \in D_{f^{-1}} \Rightarrow \sqrt{\frac{1+y}{y}} - 1 = x$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{y} + \frac{y}{y}} = (x+1)$$

$$\frac{1}{y} + 1 = (x+1)^2$$

$$\frac{1}{y} = x^2 + 2x + 1 - 1$$

$$y = \frac{1}{x^2 + 2x}$$

$$\forall x \in D_{f^{-1}} : f^{-1}(x) = \frac{1}{x^2 + 2x}$$

(3) Détermination de domaine de définition de la fonction réciproque :

$$D_{f^{-1}} = \{x \in \mathbb{R} \mid f^{-1}(x) \text{ existe}\}$$

$$x \in D_{f^{-1}} \Rightarrow x^2 + 2x \neq 0$$

$$\Rightarrow x(x+2) \neq 0$$

$$\Rightarrow x \neq 0 \text{ et } x+2 \neq 0$$

$$\Rightarrow x \neq 0 \text{ et } x \neq -2$$

$$D_{f^{-1}} =]-\infty, -2[\cup]-2, 0[\cup]0, +\infty[$$

Si on suppose que $D_f = f(D_{f^{-1}}) = f(]-\infty, -2[\cup]-2, 0[\cup]0, +\infty[)$

et bien de haussant, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$; $f(-1) = -1$

$$D_{f^{-1}} =]-1, 0[\cup]0, +\infty[\quad \text{contradiction} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

④ étude de la monotonie de la fonction $f^{-1}(x)$: Page 3

$$f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{x^2 + 2x} \right)^{1/2}$$

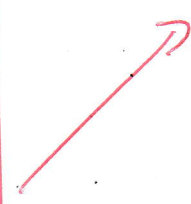
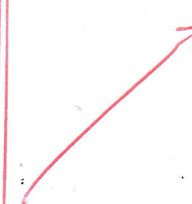
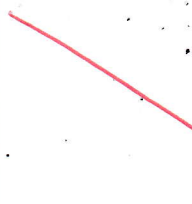
$$= \frac{1' \cdot (x^2 + 2x) - 1 \cdot (x^2 + 2x)'}{(x^2 + 2x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x - 2}{(x^2 + 2x)^2}$$

$$f^{1-1}(x) = -2 \frac{x + 1}{(x^2 + 2x)^2}$$

$$f^{1-1}(x) = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	-	-
$f(x)$					

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f^2(x)$					

Aziz économiste_tangérois

Whasapp 0693041014

5- Détermination de l'équation de la droite tangente à la fonction f^{-1} passant par $(1, f^{-1}(1))$

Page 4

$$y = f^{-1}(1)(x-1) + f^{-1}(1)$$

$$\text{on a : } f^{-1}(1) = \frac{1}{1^2 + 2 \cdot 1} = \frac{1}{3}$$

$$f^{-1}(1) = -\frac{1+1}{(1^2 + 2 \cdot 1)^2} = -\frac{2}{9}$$

$$y = -\frac{2}{9}(x-1) + \frac{1}{3}$$

$$y = -\frac{2}{9}x + \frac{2}{9} + \frac{1}{3}$$

$$y = -\frac{2}{9}x + \frac{5}{9}$$

Exercice 2 :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x e^x}{e^x - 1} & x < 0 \\ \frac{1}{e^{-\frac{1}{Tx}} + 1} & x > 0 \end{cases}$$

$x < 0$

$x = 0$

$x > 0$

① l'étude de la continuité de la fonction f en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{-\frac{1}{Tx}} + 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{-\frac{1}{Tx}}} + \lim_{x \rightarrow 0^+} 1$$

$$= \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t + \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 0 + 1 = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x e^x}{e^x - 1}$$

Aziz économiste_tangérois

on a : $\lim_{x \rightarrow 0^-} x e^x = 0 \times e^0 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 0$ Whasapp 0693041014
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^x - 1 = 0$

donc on est en présence d'une forme indéterminée de la forme $\frac{0}{0}$, la règle de l'hôpital va compliquer les choses en augmentant la difficulté de : $x e^x$
 on utilise nos relations simples de e^x : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = e^0 = 1$
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

alors : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x e^x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{e^x - 1} \times e^x$

avec $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{1} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$

donc : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$

on aboutit alors à : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$
 f est continue en 0

c) Etude de la dérivabilité de la fonction en 0 :

f est dérivable si : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1}{x}$$

on pose : $\frac{1}{\sqrt{x}} = t \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{t^2}}$

$x \rightarrow 0^+ \Rightarrow t \rightarrow +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t / 1/t^2 = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 e^t$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{t \rightarrow +\infty} (-t)^2 e^t$$

Page 6

or by substitution $-t = y \Rightarrow y = +t$

$$t \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{-\infty} y^2 e^y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{0^-} \frac{x e^x - 1}{e^x - 1}$$

$$= \lim_{0^-} \frac{x e^x - e^x + 1}{e^x - 1} \times \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{0^-} \frac{x e^x - (e^x - 1)}{x(e^x - 1)}$$

~~$$= \lim_{0^-} \frac{\frac{x e^x}{x} - \frac{e^x - 1}{x}}{x(e^x - 1)}$$~~

~~$$\text{RH} = \lim_{0^-} \frac{x' e^x + x e^x - (e^x - 1)'}{x'(e^x - 1) + x(e^x - 1)'}$$~~

~~$$= \lim_{0^-} \frac{e^x + x e^x - e^x}{e^x - 1 + x e^x} = \lim_{0^-} \frac{x e^x}{x e^x + e^x - 1}$$~~

~~$$= \lim_{0^-} \frac{x e^x}{x e^x \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x e^x} \right)} = \lim_{0^-} \frac{1}{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x e^x}}$$~~

Whasapp 0693041014

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x e^x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x e^x - e^x + 1}{x(e^x - 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{e^x - 1} \wedge \frac{x e^x - e^x + 1}{x^2}$$

avec $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{e^x - 1} = 1$ (du môme RH = $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\frac{1}{e^x} - 1} = 1$)

on calcule $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x e^x - e^x + 1}{x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x e^x - e^x + 1}{x^2} \stackrel{\text{RH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x' e^x + x e^{x'} - e^{x'} + 1}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x' e^x + x e^{x'} - e^{x'} + 1}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x + x e^x - e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x e^x}{2x}$$

$$\stackrel{\text{RH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x' e^x + x e^{x'}}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x + x e^x}{2}$$

$$= \frac{e^0 + 0 \times e^0}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

alors: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

$\Rightarrow f$ est non dérivable au point $x=0$

mais elle est dérivable à gauche et dérivable à droite au point $x=0$

① on calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^3 + 2}$ on pose $t = \sqrt{x}$

alors, $t^2 = x$

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow t \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^3 + 2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^6 + 2}$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^6 \left(1 + \frac{2}{t^6}\right)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^6} \times \frac{1}{1 + \frac{2}{t^6}}$$

avec $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2}{t^6} = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^6} = +\infty$

alors $\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^3 + 2} = +\infty \right)$

on peut même appliquer la Règle de d'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^6 + 2} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{6t^5} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{30t^4} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{120t^3} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{360t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{720t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{720} = +\infty \end{aligned}$$

calcul de la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - e^x}{x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+2x} - e^x)(\sqrt{1+2x} + e^x)}{x^2(\sqrt{1+2x} + e^x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+2x - e^{2x}}{x^2(\sqrt{1+2x} + e^x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+2x - e^{2x}}{x^2} \times \frac{1}{\sqrt{1+2x} + e^x}$$

on calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+2x - e^{2x}}{x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+2x - e^{2x}}{x^2} \stackrel{RH}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2e^{2x}}{2x}$$

$$\stackrel{RH}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4e^{2x}}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} -2e^{2x}$$

$$= -2 \times e^0 = -2$$

$$\text{alors: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+2x - e^{2x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} -2x \frac{1}{\sqrt{1+2x} + 1} = \frac{-2}{2} = \boxed{-1}$$

① Écriture de $f(x)$ en fonction de $\frac{1}{x-1}$ et $\frac{1}{x+1}$

$$f(x) = \left\{ \frac{2x}{(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} \right\}$$

on multiplie la relation par $(x-1)$

$$\frac{2x}{x+1} = \frac{a}{x-1} x(x-1) + \frac{b}{x+1} x(x-1)$$

on remplace x par $x=1$

$$\frac{2 \times 1}{1+1} = \frac{a}{1-1} + \frac{b}{1+1} x(1-1)$$

$$\frac{2}{2} = a \Rightarrow \boxed{a=1}$$

$$\frac{2x}{(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

on multiplie la relation par $(x+1)$

$$\frac{2x}{x-1} = \frac{a}{x-1} x(x+1) + b$$

on remplace x par $x=-1$

$$b = \frac{2 \times -1}{-1-1} = -2/-2 = 1$$

Exercice

on a : $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$

$$\Rightarrow f(x) = (x-1)^{-1} + (x+1)^{-1}$$

② $f'(x) = -1 \times (x-1)^{-2} \times (x-1)' + (-1) \times (x+1)^{-2} \times (x+1)'$
 $f'(x) = -(x-1)^{-2} - (x+1)^{-2}$

$$f''(x) = +2(x-1)^{-3} + 2(x+1)^{-3}$$

$$f^{(3)}(x) = -6(x-1)^{-4} - 6(x+1)^{-4}$$

$$f^{(4)}(x) = +24(x-1)^{-5} - 6(x+1)^{-5}$$

③ La dérivée n-ème de la fonction f :

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \times (x-1)^{-n-1} \times n! + (-1)^n \times n! \times (x+1)^{-n-1}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \times n! \times (x-1)^{-n-1} + (-1)^n \times n! \times (x+1)^{-n-1}$$