

CH2 :L'utilité

- Les préférences
- L'utilité
- Lien entre convexité et l'utilité
- Lien entre l'utilité et TMS
- Conclusion

Le terme **utilité** a été utilisé autrefois, par les classiques, comme moyen pour **évaluer le bien-être d'un individu**.

Le concept d'attacher des valeurs numériques à différents niveaux de bonheur s'appelle "**l'utilité cardinale**". Ce concept a été progressivement abandonné au profit de la notion de "**l'utilité ordinale**". La théorie du comportement du consommateur a été reformulée selon les **préférences**.

Les Préférences

Considérons un consommateur qui doit faire le choix entre deux panier (x_1, x_2) et (y_1, y_2) . Plusieurs cas se représentent concernant son comportement :

- **1^{er} cas** : Le premier panier est **strictement préféré** au deuxième. on notera par $(x_1, x_2) > (y_1, y_2)$: le consommateur juge alors que le 1^{er} est meilleur que le 2iè^{me}

- **2^{ième} cas** : les deux paniers procure le consommateur le même niveau de satisfaction ceci veut dire qu'il est **indifférent** entre les deux paniers. Dans ce cas on dira que les deux paniers sont équivalents et on notera par $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$.
- **3^{ième} cas** : si le consommateur tend à préférer le premier panier mais aussi indifférent en dira qu'on une **préférence faible** de (x_1, x_2) à (y_1, y_2) . dans ce cas on notera $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$.

Hypothèses

- L'ensemble des paniers est **complet** : tous les paniers sont comparables
- **Transitivité** des préférences :

En effet, si on se donne trois paniers X, Y, Z tels que,

$$X \geq Y \quad \text{et} \quad Y \geq Z$$

Alors $X \geq Z$

Exemple

- Dans le cas ou on a deux biens un paquet de chocolat et des boules de glaces particuliers.

- $X = (x_1, x_2) = (3\text{paquets}, 5\text{boules})$
 $>$ (est préféré strictement)

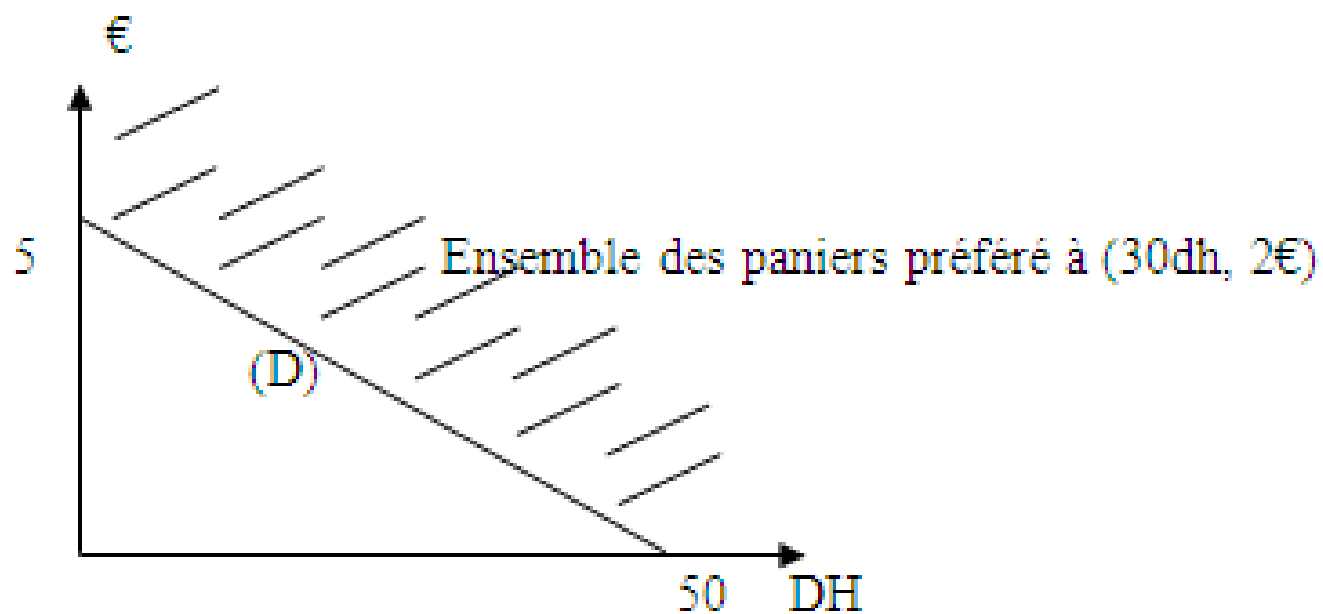
$$Y = (y_1, y_2) = (2\text{paquets}, 3\text{boules})$$
$$>$$

$$Z = (z_1, z_2) = (100\text{paquets}, 2\text{boules})$$

pour quelqu'un qui préfère la glace
uniquement on aura $X > Z$ même si la valeur
du panier Z peut être supérieure à X

Courbes d'indifférence

- Considérons deux biens le Dirham et l'Euro.
- Supposons qu'un agent économique possède un portefeuille (panier) de 30 dh et 2 euros, et que $1 \text{ €} = 10\text{dh}$ et qu'il n'y a pas de frais de change. La valeur du portefeuille est alors 50dh .
- L'agent est donc indifférent entre avoir un panier (20dh, 3 €) ou bien (10 dh, 4€), ou bien (30dh, 2€). Ces points se trouvent sur la même droite D



La droite (D) définie par l'équation

$$y = -\frac{1}{10}x + 5$$

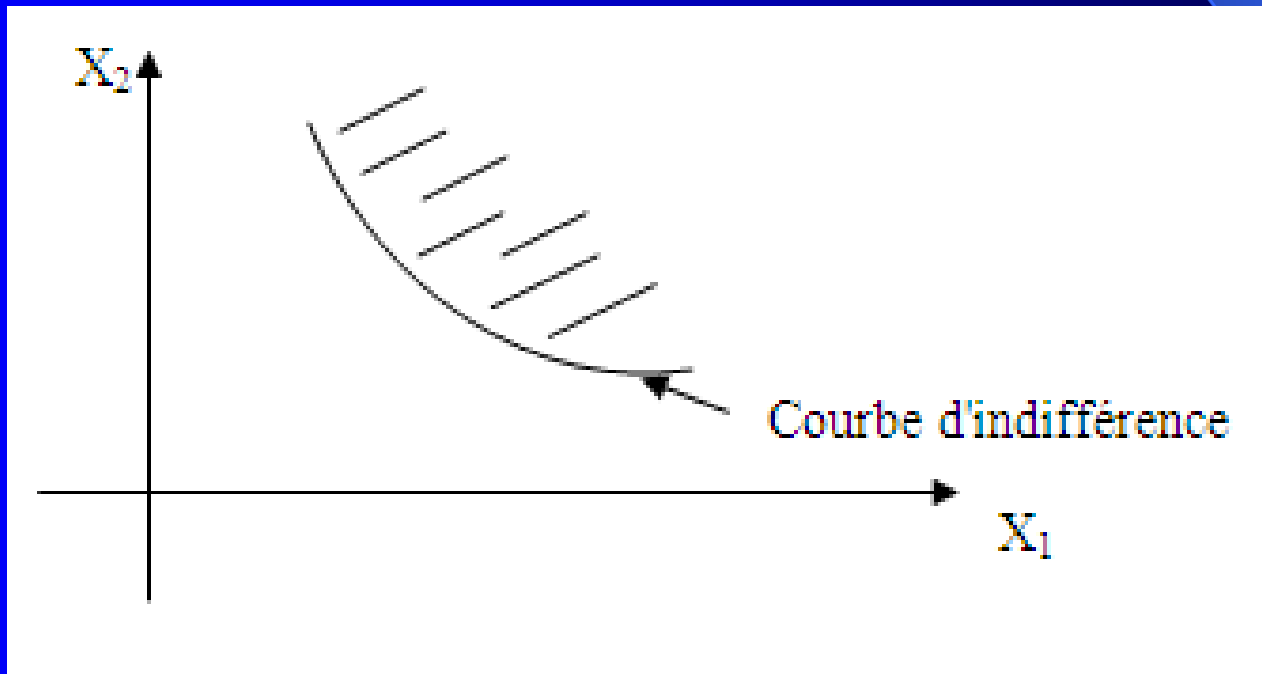
- Si vous prenez (40dh,4€) et vous la représentez dans le graphique vous allez trouver que ce point se trouve au dessus de la droite D à l'intérieur de la zone hachurée. Ce panier est strictement préféré à (30dh,2€).

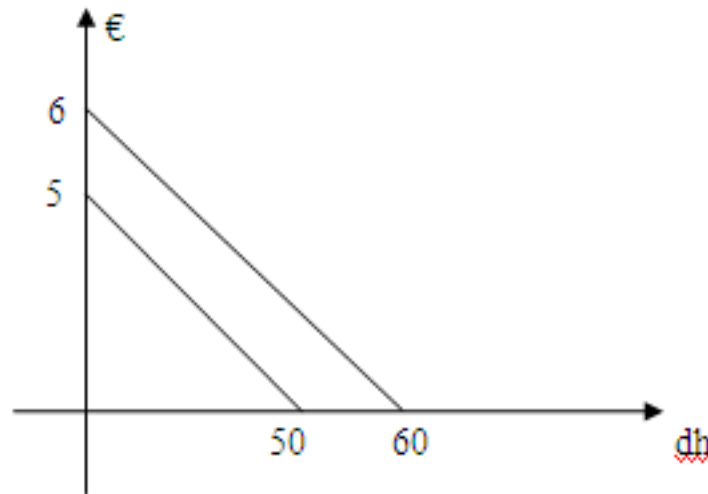
- (D) délimite la **frontière** des paniers préférés à (30dh, 2€). L'ensemble des paniers qui se trouvent sur cette droite sont **équivalent** : cette frontière des paniers faiblement préférés s'appelle **courbe d'indifférence** du consommateur :

On a bien une courbe d'indifférence par valeur de portefeuille dans cet exemple. Les paniers qui sont équivalents procurent le même niveau de **satisfaction**. Ce niveau est mesuré par la valeur en Dh du portefeuille.

Définition 1

La **frontière** de l'ensemble des paniers faiblement préféré à un panier (x_1, x_2) s'appelle **courbe d'indifférence**.



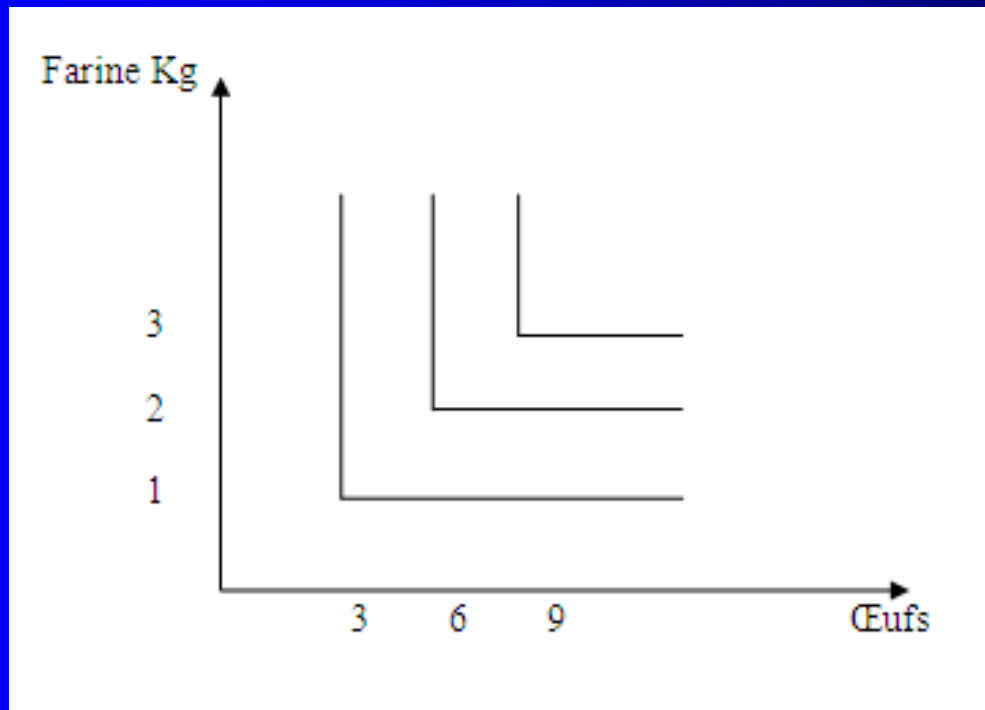


Deux courbes d'indifférences ne peuvent jamais se couper

les courbes d'indifférences sont des droites on dira que les deux biens dirhams et euros sont des substituts. Le consommateur est prêt à échanger un bien par un autre avec un taux fixe.

- Les courbes d'indifférences caractérisent le comportement du consommateur puisque elles contiennent les choix qu'il va faire via les préférences qu'il fait sur les paniers pour deux biens donnés.
- Dans cet exemple du Dh et de l'Euro on avait des courbes d'indifférences sous formes de droites. Mais ces courbes peuvent avoir n'importe quelle forme selon le comportement ou les préférences du consommateur.

Par exemple, La consommation des biens **complémentaires** se fait en des **proportions fixes** comme c'est le cas des biens qui entrent dans la préparation d'un gâteau (les courbes sont en forme de L pour les compléments parfaits)



On considère uniquement des courbes d'indifférences à **allure normale** (càd, consommateur à comportement normal), cet allure provient de certaines **hypothèses** sur les **préférences**.

Hypothèse 1 : monotonicité des préférences

Le consommateur est possessif, il veut avoir toujours plus.

Hypothèse 2 : **convexité**

Les **courbes d'indifférences** sont **convexes**, ceci veut dire qu' un panier **intermédiaire** entre **deux paniers équivalents** ne peut jamais procurer moins de satisfaction que l'un des deux paniers.

Exemple :

Considérons un exemple dans lequel on a deux biens la farine et les œufs et le niveau de satisfaction est mesuré par le nombre de gâteau qu'on peut préparer à partir d'un panier.

Admettons que pour faire un gâteau il nous faut 1 kg de farine et 3 œufs exactement.

Alors que

Les paniers $X=(3\text{Kg}, 3\text{œufs})$ et $Y=(1\text{Kg}, 9\text{œufs})$ ne permettent de préparer qu'un gâteau chacun .

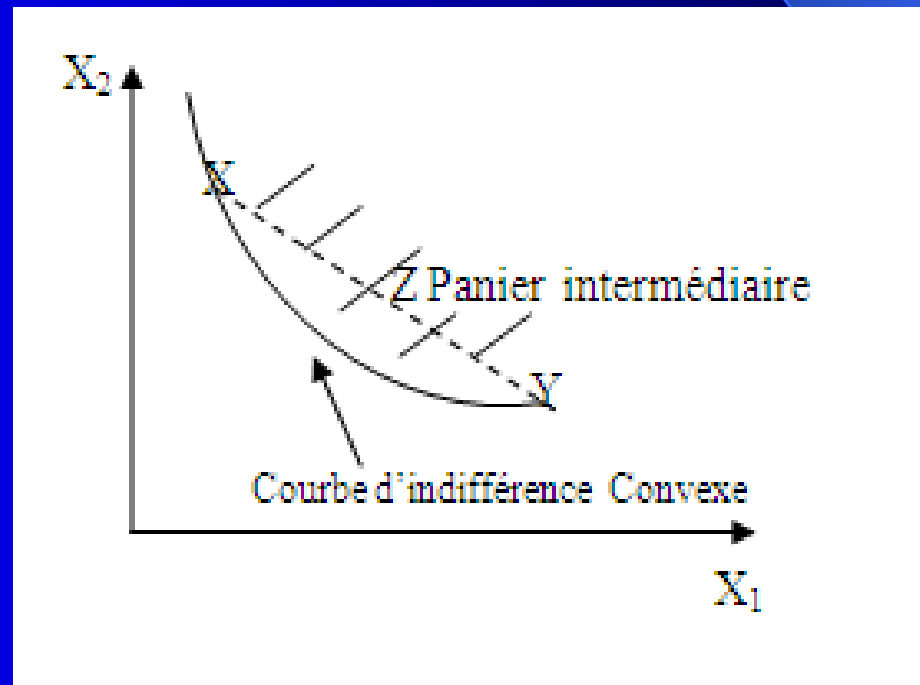
Mais Le panier $(X+Y)/2=(2\text{Kg}, 6\text{œufs})$

$$(X+Y)/2 = \left(\frac{3+1}{2} \text{Kg}, \frac{3+9}{2} \text{œufs} \right) = (2\text{kg}, 6 \text{œufs})$$

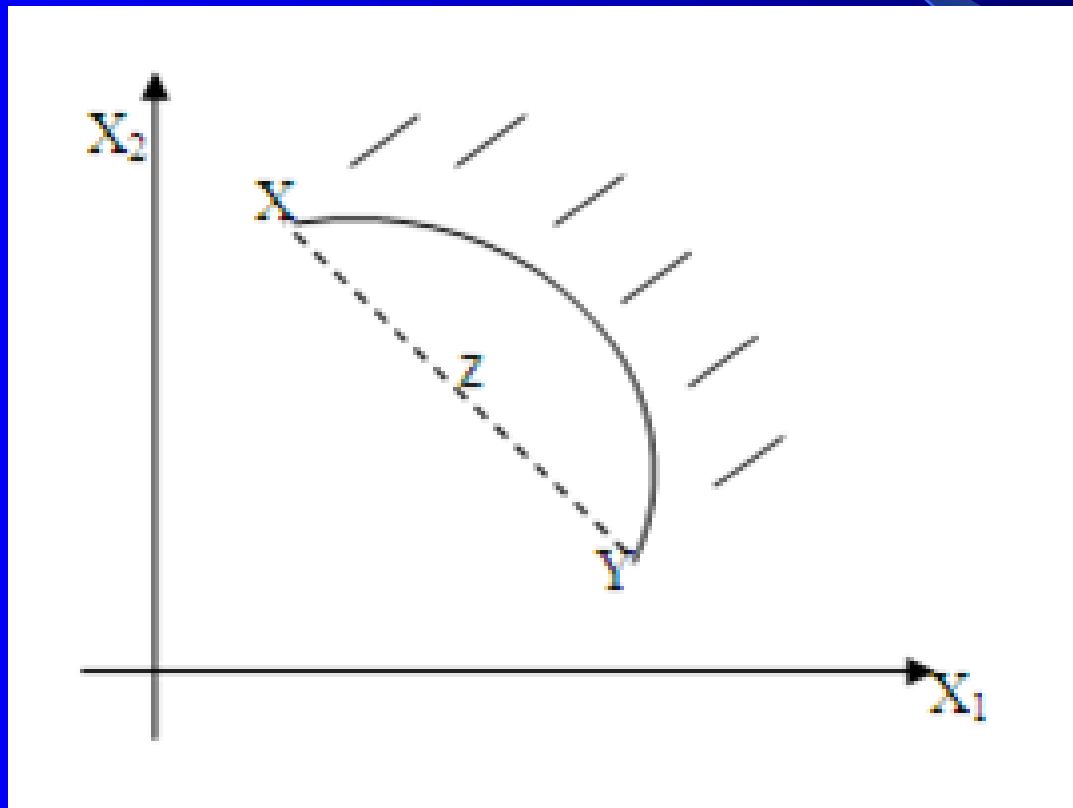
Permet deux gâteaux ! (voir Graphe 1)

- Soit un niveau de satisfaction supérieur strictement à celui des deux paniers qui sont équivalents . Ceci a été possible à cause de la convexité des CI à allure normal.

- Graphique 1 :



C.I. non convexes

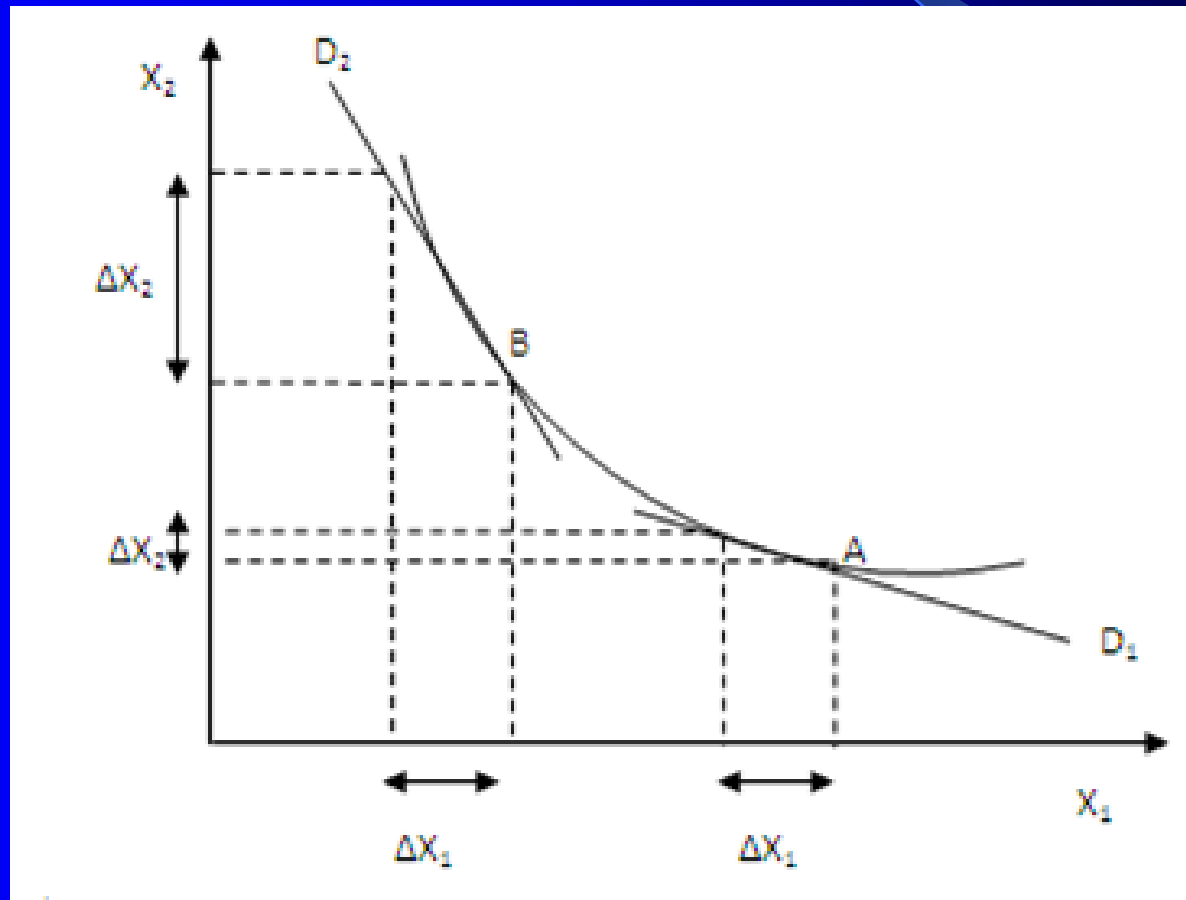


la **convexité des courbes d'indifférences** permet des développements théoriques très importants en microéconomie moderne, on dira dans ce cas que les **préférences du consommateur sont convexes**

Intéressons nous à une CI convexe. Soit A un panier pour lequel le consommateur décide de réduire sa consommation du bien 1 d'une quantité Δx_1 **en restant sur la même courbe d'indifférence**

- Quelle sera alors la quantité appropriée complémentaire du bien 2 notée par Δx_2 ?

Graphique 2



Autour du panier A, le bien 1 est abondant et le bien 2 qui est plus important aux yeux du consommateur; alors qu'autour du panier B c'est le bien 1 qui importe que le bien 2.

Par apport au panier A, **plus on a du bien 1 plus on est disposé à l'échanger** contre une petite quantité du bien 2

- Il s'en suit que le rapport Δx_2 versus Δx_1 s'avère un bon indicateur de mesure de l'importance du bien 1 par rapport au bien 2, au yeux du consommateur.
- Ce rapport représente la pente de la tangente à la courbe d'indifférence en un point panier. Les pentes D1 et D2 aux points A et B sont différentes. (voir graphique 2)

- **Définition 2 :**

La **pente** de la courbe d'indifférence en un point (panier) s'appelle le **Taux Marginal de Substitution (TMS)**. Il représente le taux avec lequel le consommateur est prêt à substituer un bien à un autre.

$$\text{Taux Marginale de Substitution} = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \text{pente}$$

Le comportement du consommateur est caractérisé par les CI. L'allure des CI est caractérisé par leurs TMS. Ce TMS régle aussi la relation de substitution entre deux biens aux yeux du consommateur. Par exemple :

- Les **substituts parfaits** ont un $T_{ms} = -1$ ou (négatif et constant en général)
- Les biens **complémentaires** ont $T_{ms} = 0$ ou ∞ . (car la pente pour les CI en L est soit 0 soit l'infini)

Proposition :

Les courbes d'indifférences **convexes** se caractérisent par un taux marginal de substitution **décroissant**.

Ceci veut dire tout simplement que la pente diminue lorsqu'on se déplace de gauche vers la droite dans le graphique 2. (D2 devient D1). Ceci est spécifique pour les fonctions convexes.

Récapitulatif

- On a vu que les CI permettent de caractériser le **comportement** du consommateur. Elles permettent de comparer entre les différents paniers. Les paniers qui se trouvent sur la même **courbe d'indifférence** sont équivalents et dégagent la même satisfaction pour un consommateur. C'est pour cela qu'on peut attacher une valeur pour mesurer cette **satisfaction**.

- Inversement, deux paniers qui appartiennent à une même CI auront la même valeur attachée (dite utilité) et sont donc équivalents.
- Deux paniers qui appartiennent à deux CI monotones auront certainement des valeurs (utilités) croissantes car sont strictement préférés. On peut utiliser alors ses valeurs pour comparer entre les paniers et caractériser le comportement du consommateur. Ce qui nous pousse à introduire la notion d'utilité :

L'utilité

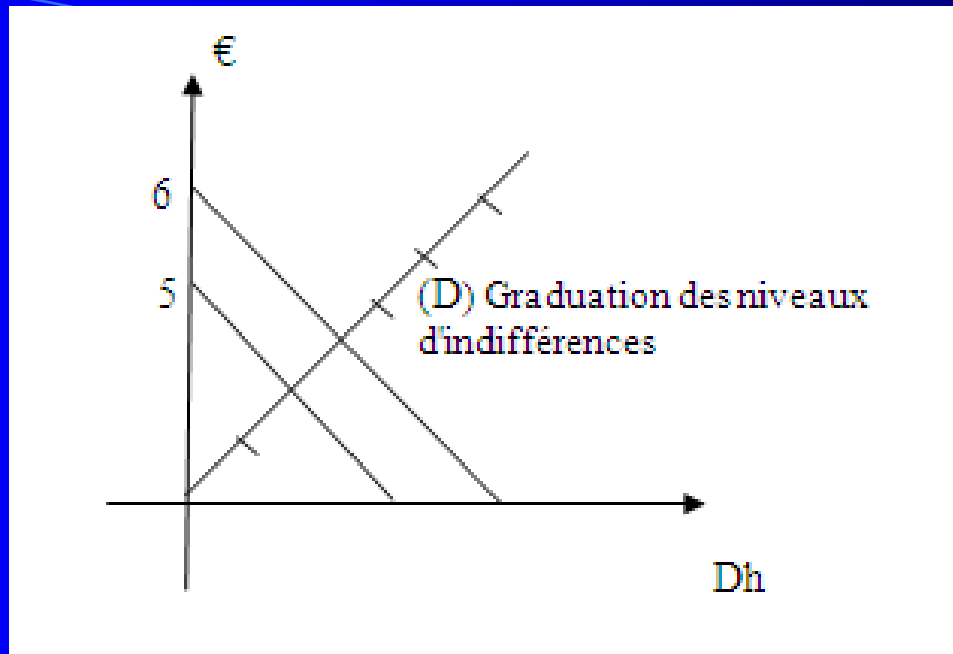
$U(.)$ une fonction d'utilité alors par définition,

- Un panier $X(x_1, x_2)$ est **préféré** à $Y(y_1, y_2)$ si et seulement si

$$U(x_1, x_2) > U(y_1, y_2)$$

- $X(x_1, x_2)$ est **équivalent** à $Y(y_1, y_2)$ si et seulement si

$$U(x_1, x_2) = U(y_1, y_2)$$



Exemple :

- $U(20Dh, 3€) = 50Dhs$
- $U(30 Dh, 2€) = 50 Dhs$
- $U(2dh, 4€) = 60 Dhs$ etc.

Une **transformation croissante** de $U()$ est aussi une fonction d'utilité (exercice)

- La fonction d'utilité permet de caractériser le **comportement** du consommateur. Elle permet aussi la comparaison entre paniers et d'en déduire le **choix** que va faire ce consommateur. Le concept d'utilité vient remplacer les CIs. Par exemple on peut reconnaître les biens substituables ou complémentaires sans passer par l'allure des CIs :

Fonctions d'utilités particulières

- les **substituts parfaits** peuvent être représentés par

$$U(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 \quad \text{a et b sont deux constantes}$$

- Les **compléments parfaits** ont une fonction d'utilité de la forme

$$U(x_1, x_2) = \min(ax_1, bx_2)$$

- la fonction dite de **Cobb–Douglas**

$$U(x_1, x_2) = x_1^c x_2^d \quad c, d \in \mathbb{R}^{+*}$$

$$\text{Avec } c + d = 1$$

Lien entre utilité et C.I.

La stricte **convexité** des courbes d'indifférence entraînent la stricte **concavité** de la fonction d'utilité.

Exemple :

$$U(x_1, x_2) = 3x_1^{1/2} x_2^{2/5}$$

est bien une fonction d'utilité à allure normal car concave.

Exercice

- Calculer la dérivée partielle de U par rapport à x_1 et x_2 notées par U_{x_1} et U_{x_2} .

Réponse :

La dérivée de U par rapport à x_1 se fait comme pour le cas de la dérivée de fonction à une variable. Dans ce cas x_2 est considérée comme constante.

La dérivée partielle de U par rapport
au premier argument x_1 est

$$U'_{x_1}(x_1, x_2) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot x_1^{1/2-1} x_2^{2/5}$$

$$U'_{x_1}(x_1, x_2) = 3/2 \cdot x_1^{-1/2} x_2^{2/5}$$

I
De même, La dérivée partielle de U

par rapport au deuxième argument x_2 est

$$U'_{x_2}(x_1, x_2) = 3 \cdot \frac{2}{5} \cdot x_1^{1/2} x_2^{2/5-1}$$

$$U'_{x_2}(x_1, x_2) = 6/5 \cdot x_1^{1/2} \cdot x_2^{-3/5}$$

La dérivée de la fonction d'utilité sert au calcul du TMS sans passer par les CI. C.à.d la dérivée de U permet de déterminer comment le consommateur va substituer une quantité d'un bien x_1 par une quantité d'un autre bien x_2 :

Lien entre l'utilité et TMS

Proposition

Le Taux Marginal de Substitution peut être calculé à partir de la fonction d'utilité selon la formule

$$\frac{dx_2}{dx_1} = - \frac{U'_{x_1}(x_1, x_2)}{U'_{x_2}(x_1, x_2)}$$

Suite de l'exercice

- Le TMS sera alors pour

$$U(x_1, x_2) = 3x_1^{1/2} x_2^{2/5}$$

$$\begin{aligned} \text{TMS} &= - \frac{U'_{x_1}(x_1, x_2)}{U'_{x_2}(x_1, x_2)} \\ &= - \frac{3/2 x_1^{-1/2} x_2^{2/5}}{6/5 x_1^{1/2} x_2^{-3/5}} = -5/4 \cdot \frac{x_2}{x_1} \end{aligned}$$

Définition

La **dérivée** (ou la pente) de la fonction d'utilité par rapport au **bien 1** s'appelle l'**utilité marginale** du bien1 :

$$U'_{x_1}(x_1, x_2) = \frac{u(x_1 + \Delta x_1, x_2) - u(x_1, x_2)}{\Delta x_1}$$

C'est l'utilité ou la satisfaction dégagée par unité supplémentaire de consommation.

Autre exemple:

$$U(x_1, x_2) = c \log x_1 + d \log x_2$$

Calculons le **TMS** ?

$$U'_{x_1}(x_1, x_2) = \frac{c}{x_1}$$

$$U'_{x_2}(x_1, x_2) = \frac{d}{x_2}$$

$$\text{TMS}(x_1, x_2) = -\frac{c x_2}{d x_1}$$

Conclusion

- Chaque courbe d'indifférence est en fait un niveau de **préférence**
- Les préférences sont nécessairement **monotones**
- La **pente**, en un point panier, est le **TMS**
- Le **TMS** est le rapport des utilités marginales **utilités marginales**

Questions de compréhension

1. Définir une courbe d'indifférence
2. Quelles sont ses propriétés ?
3. Définir une fonction d'utilité et ses propriétés
4. Démontrer que si les CI sont convexes alors la fonction d'utilité est concave. Interpréter.
5. Donner quatre définitions du TMS et quel est son lien avec l'utilité ?
6. Calculer le TMS pour $U(x_1, x_2) = 5x_1^{2/3} x_2^{3/7}$